El Teorema Pi y la modelación

Luis Quintanar Medina
Instituto Superior de Matemática (INSUMA)
Aguascalientes, Ags.

Magnitudes, unidades y dimensiones

Para describir los fenómenos que nos rodean es necesario determinar primero las magnitudes que pueden ser útiles, aquéllas que tienen una influencia primordial en su desarrollo; después nos interesa conocer relaciones entre ellas o leyes.

Tales relaciones pueden obtenerse directamente de forma experimental o partiendo de alguna teoría conocida; otra forma consiste en establecer una relación tentativa (que después habrá de comprobarse o desecharse con ayuda del experimento) usando el llamado Teorema Pi de Buckingham, que es el caso que nos interesa; este tópico pertenece al análisis dimensional, con el cual se logra completar un análisis matemático de los problemas que surgen en la realidad y reducir costos de experimentación; esta técnica es muy útil en problemas que surgen en mecánica, en particular la de fluidos.

Las magnitudes como la velocidad, densidad, etc. se expresan en ciertas *unidades*, como metros por segundo $\frac{m}{s}$, kilogramo por metro cúbico $\frac{kg}{m^3}$, etc.

Por otra parte, en mecánica tenemos tres *dimensiones* importantes: longitud (L), masa (M) y tiempo (T), que se expresan en unidades como metro, kilogramo y segundo, respectivamente; una magnitud física como la velocidad se puede expresar en metros por segundo ($\frac{m}{s}$) y en dimensiones como $\frac{L}{T}$ o L^1T^{-1}.

Representaremos las dimensiones de una magnitud con paréntesis cuadrados [ ], por ejemplo, si usamos la letra v para referirnos a la magnitud velocidad, $[v]$=L^1T^{-1}; en general, si tenemos n magnitudes q_i, se pueden escribir sus dimensiones como $[q_i]$=$D_1^{a_{1i}}D_2^{a_{2i}}\ldots,D_m^{a_{mi}}$, $i=1,2,\ldots,n.$, en donde los

D_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ representan alguna dimensión, como L, M o T; en esta notación $[v] = L^1 T^{-1} M^0$.

Si $[q_i] = 1$ se dice que q_i es adimensional; esto supone que los $a_{ij} = 0\ \forall i, j$.

Independencia de las unidades

Una ley será una relación entre las magnitudes que describen un fenómeno; por ejemplo, la ley entre las magnitudes velocidad (v), aceleración (para el caso de aceleración, a, constante) y tiempo (t) del movimiento rectilíneo de un objeto considerado como un punto es

$$v = v_0 + at,$$

en donde v_0 representa la velocidad inicial.

La expresión anterior se puede escribir como

$$v - v_0 - at = 0$$

o, en forma más general, como

$$f(v, v_{0,}a, t) = 0.$$

Consideremos lo siguiente: si sabemos que se cumple la ley $v = v_0 + at$ para cuando la velocidad se está expresando en $\frac{m}{s}$, la aceleración en $\frac{m}{s^2}$ y el tiempo en segundos, ¿se cumplirá la misma ley entre estas magnitudes si la velocidad, la aceleración y el tiempo se expresaran en otras unidades, digamos, respectivamente, $\frac{cm}{s}$, $\frac{cm}{s^2}$, s?

Si es así, se dice que la ley es *libre de unidades* (unit free):

La ley física $f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ es libre de unidades si para todos los reales λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m con $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, tenemos

$$f(\overline{q}_1, \overline{q}_2, \ldots, \overline{q}_n) = 0 \Leftrightarrow f(q_1, q_{2,} \ldots, q_n) = 0 \text{ con } \overline{q}_j = \lambda_1^{b_q} \lambda_2^{b_2} \ldots, \lambda_m^{b_m} q_j.$$

El Teorema Pi

El teorema Pi dice lo siguiente:

1. Sea la ley física $f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$, libre de unidades, en donde q_1, q_2, ..., q_n son magnitudes dimensionales.

2. Sea $L_{1,}L_2, \ldots, L_m$, $m < n$, dimensiones básicas y

$$[q_i] = L_1^{a_{1i}} L_2^{a_{2i}} \ldots, L_m^{a_{mi}}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots\ldots & \\ . & \ldots\ldots & \\ . & \ldots\ldots & \\ . & \ldots\ldots & \\ a_{m1} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es una matriz mxn de rango r.

ENTONCES

a) Existen $n - r$ cantidades adimensionales $\Pi_{1,}\Pi_{2,} \ldots, \Pi_{n-r}$ independientes que pueden formarse con las $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

b) La ley física $f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$ es equivalente a $F(\Pi_{1,}\Pi_{2,} \ldots, \Pi_{n-r}) = 0$.

En esencia, el teorema expresa que es posible describir un fenómeno con una cantidad de parámetros *adimensionales* $(\Pi_1, \Pi_{2,} \ldots, \Pi_{n-r})$ que es menor que la cantidad de parámetros *dimensionales* involucrados $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Ejemplo

Consideremos el péndulo matemático que realiza oscilaciones pequeñas y que tiene longitud l, periodo p y sometido a la aceleración de la gravedad g; es importante señalar que para usar el análisis dimensional debe tenerse una idea lo más clara posible de las magnitudes fundamentales involucradas en el fenómeno, en este caso, estamos suponiendo que el fenómeno está determinado por tres magnitudes dimensionales: p, l, g .

Supongamos que existe la ley libre de unidades

$$f(p, l, g) = 0;$$

Ya que hay tres magnitudes dimensionales tendremos $n = 3$.

Para las dimensiones tenemos, puesto que las unidades de p son, digamos $\frac{1}{s}$, las de l metros y las de la aceleración de la gravedad $\frac{m}{s^2}$:

$$\begin{aligned} [p] &= T^{-1}L^0 \\ [l] &= \ T^0L^1 \\ [g] &= T^{-2}L^1 \end{aligned}$$

y entonces $m = 2$ (dos dimensiones involucradas).

Con lo anterior tenemos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que es de rango $r = 2$; por tanto, tenemos $n - r = 1$ magnitudes adimensionales que se forman con p, l, g , digamos, Π_1.

Además, son equivalentes las leyes $f(p, l, g) = 0$ y $F(\Pi_1) = 0$.

¿Cómo obtener Π_1?

Se construye con las tres magnitudes que determinan al sistema, de la siguiente manera:

$\Pi_1 = p^x l^y g^z$, imponiéndole la condición de adimensionalidad $[\Pi_1] = 1$; entonces $[\Pi_1] = T^{x-2z}L^{y+z}$ debe ser la unidad, lo que nos da el sistema de ecuaciones

$$x - 2z = 0 \quad \text{y} \quad y + z = 0.$$

Observen que este sistema se puede obtener de $Av = 0$, considerando al vector $v = (x, y, z)$.

Una solución del sistema es $z = 1/2$, $y = -1/2$, $x = 1$.

Entonces

$$\Pi_1 = p^1 l^{-1/2} g^{1/2} = p\sqrt{\tfrac{g}{l}}$$

y además, la ley $F(p\sqrt{\frac{g}{l}}) = 0$ es equivalente a $f(p, l, g) = 0$ que es la ley para las magnitudes dimensionales.

Si se propone una función lineal F en Π_1:

$$a\Pi_1 + b,$$

donde a, b son constantes entonces $\Pi_1 = c$, con c constante, es decir

$$p = c\sqrt{\tfrac{l}{g}};$$

Esta expresión, obtenida usando el análisis dimensional, debe ser constatada o eliminada vía la experimentación (la relación real es $p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$).

La Modelación

El conocer que ciertas leyes entre magnitudes dimensionales se cumplen para otras adimensionales es muy útil en la modelación; un *prototipo* es un objeto que se desea estudiar mientras que un *modelo* lo representa a una escala menor o mayor, por ejemplo una maqueta de un edificio, un barco de plástico o un avión de metal son modelos de sus correspondientes objetos reales.

Si se ha establecido que una ley entre magnitudes dimensionales es equivalente a una entre magnitudes adimensionales e involucra a la magnitud adimensional $\Pi = \frac{h}{a}$ en donde h y a se dan en metros, también se cumple para h y a dados en centímetros, es decir, para un objeto semejante pero de menores dimensiones; se habla entonces de objetos similares.

La *similaridad* del prototipo y del modelo debe darse a varios niveles: *geométrico*, *cinemático* y *dinámico*, es decir, en cuanto a *su forma* las estructuras deben ser similares, lo mismo se debe cumplir para *las trayectorias* que describan prototipo y modelo, si realizan movimientos, y para *las fuerzas* involucradas, que deben ser proporcionales; así, si la segunda ley de Newton se cumple para el prototipo, se cumplirá también para el modelo y es posible entonces experimentar con éste para conocer lo que pudiera pasarle realmente al prototipo; cuando hay similitud geométrica, cinemática y dinámica se habla de *similitud dinámica*; por ejemplo en el caso de fluidos esta se da a través de las magnitudes adimensionales conocidas como número de Reynolds (razón de fuerzas inerciales y viscosas), de Froude (que expresa la relación entre fuerzas de inercia y gravedad), de Weber (razón de fuerzas de inercia y tensión superficial) y de Mach (razón de fuerzas inerciales y elásticas), que deben ser las mismas para modelo y prototipo.

Bibliogrfía

-Brand L. The Pi Theoren of Dimensional Analysis.

-Fernández B. Mecánica de fluidos. Alfaomega Grupo Editorial, México D.F, 1999.

-Langhaar H. Dimensional Analysis and Theory of Models. John Wiley & Sons. London, 1962

-Logan J. Applied Mathematics. John Wiley & Sons, USA, 1987

-Stretter V. y Wylie B. Mecánica de los fluidos.McGraw-Hill Interamericana, México, 1988.